4.3 LU dekompozicija i primjene

Pretpostavimao da matricu A reda n

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{1}$$

možemo zapisati kao produkt

$$\mathrm{A} = \mathrm{L} \cdot \mathrm{U} \tag{2}$$

donje (*lower*) trokutaste matrice s jediničnom dijagonalom

$$\mathrm{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ l_{n-1,1} & l_{n-1,2} & l_{n-1,3} & \cdots & 1 & 0 \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & l_{n-1,1} & 1 \end{bmatrix} \tag{3}$$

i gornje (*upper*) trokutaste matrice

$$\mathrm{U} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1,n-1} & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2,n-1} & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \cdots & u_{3,n-1} & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & u_{n-1,n-1} & u_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & u_{nn} \end{bmatrix} \tag{4}$$

1. Kako odrediti takav rastav ako postoji?

   - Radi jednostavnosti promotrimo primjer s malim redom (3):

$$\mathrm{L} \cdot \mathrm{U} = \mathrm{A} \tag{5}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 14 \\ 2 & 6 & 13 \end{bmatrix} \tag{6}$$

- Dakle, problem se svodi na rješavanje sustava linearnih jednadžbi.

$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ l_{21}u_{11} & l_{21}u_{12}+u_{22} & l_{21}u_{13}+u_{23} \\ l_{31}u_{11} & l_{31}u_{12}+l_{32}u_{22} & l_{31}u_{13}+l_{32}u_{23}+u_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 14 \\ 2 & 6 & 13 \end{bmatrix} \tag{7}$$

- Je li prvi red trivijalan? Kojim redom dolazimo do ostalih rješenja?
- Kako napisati jednadžbe za općenit sustav?

  `http://mathworld.wolfram.com/CroutsMethod.html`
- Složite shemu algoritma koji to radi.
- Traženi rastav:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 14 \\ 2 & 6 & 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \tag{8}$$

- Koliko vam minimalno polje treba za pohranu rješenja?
- Kako proračun učiniti numerički stabilnijim? Parcijalno pivotiranje (samo s retcima).
- Funkcija iz *Numerical Recipes*

```
/* ****************** LU DEKOMPOZICIJA matrice C=A ************************ */
// Ulazni elementi: c    = matrica koju rastavljamo C=L*U
//                  n    = dimenzija ulazne matrice
//                  indx = vektor za biljezenje permutacija redaka
//                  &p   = adresa varijable za pohranu permutacija
ludcmp(c,n,indx,&p);
// Izlazni elementi: c   = U: dijagonala i elementi iznad u C, ostali 0
//                         L: 1 na dijagonali, elementi ispod iz C, ostatli 0
//                  indx = vektor koji sadrzi permutacije redaka
//                  p    = +1 za paran broj izmjena redaka, -1 za neparan
```

2. Kako iskoristi LU-rastav za rješavanje sustava linearnih jednadžbi $A \cdot x = B$, odnosno $L \cdot U \cdot x = B$?

   - Prvi korak: uvedemo zamjenu $y = U \cdot X$ pa riješimo $L \cdot y = B$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \tag{9}$$

zamjenjujući redom (od manjeg indeksa prema većem)

$$y_1 = b_1 \tag{10}$$

$$y_2 = b_2 - l_{21}y_1 \tag{11}$$

$$\ldots = \ldots \tag{12}$$

$$y_n = b_n - \sum_{j=1}^{n-1} l_{nj}y_j \tag{13}$$

- Drugi korak: riješimo $U \cdot x = y$

$$\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \tag{14}$$

zamjenjujući redom (od većeg indeksa prema manjem)

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{1}{u_{nn}} y_n \\ x_{n-1} &= \frac{1}{u_{n-1,n-1}} (y_{n-1} - u_{n-1,n} y_n) \\ \cdots &= \cdots \\ x_1 &= \frac{1}{u_{1,1}} (y_1 - \sum_{j=2}^{n} u_{1,j} y_j) \end{aligned}$$

- Funkcija iz *Numerical Recipes*

```
/* Funkcija koja rjesava sustav linearnih jednadzbi AX = LUX = B */
// Ulazni elementi: c    = matrica koju je vratila ludcmp (LU)
//                  n    = red ulazne matrice
//                  indx = permutacije koje je vratila ludcmp
//                  x    = slobodni koeficijenti (B)
lubksb(c,n,indx,x);
// Izlazni elementi: c    = ostaje nepromijenjen
//                   n    = ostaje nepromijenjen
//                   indx = ostaje nepromijenjen
//                   x    = rjesenja sustava A*X=B
```

3. Možemo li prethodnu shemu iskoristit za određivanje inverzne matrice?

4. Je li LU-rastav pogodan za računanje determinante rastavljene matrice?

4.4 Zadatak

a) Skinite i raspakirajte arhivu NR_LU.zip.

b) Preimenujte ZAD.c u (vaši inicijali bez kvačica ako postoje).c

c) Koristeći funkcije iz Numerical Recipes riješite zadatke koji su navedeni kao komentari.

d) Prvo rastavite matricu sustava koja je dana u ulaznoj datoteci, a zatim riješite sustav linearnih jednadžbi za slobodne koeficijente dane u zadnjem retku.

e) Kako biste prilagodili kod tako da za istu matricu sustava

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 3 & 6 & -4 \\ 2 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

riješite skup više linearnih jednadžbi,

$$A \cdot X_i = B_i, \ i = 1,2,3$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

za vektore B

$$B_1 = \begin{pmatrix} 12 \\ -25 \\ 32 \end{pmatrix}, \ B_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -10 \\ 22 \end{pmatrix}, \ B_3 = \begin{pmatrix} 20 \\ -30 \\ 40 \end{pmatrix}.$$

Rješenje bi trebalo biti

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \ X_2 = \begin{pmatrix} 0.312 \\ -0.038 \\ 2.677 \end{pmatrix}, \ X_3 \begin{pmatrix} 2.319 \\ -2.965 \\ 4.790 \end{pmatrix}.$$

Opširnije:

- Odgovori na predavanjima 06.06.
- Dodatna literatura je na moodle-u.